Matroids and Greedy Algorithms

Կոմբինատոր օպտիմիզացիայի տեսական հիմքերը

Էմմա Սադյան

Ի՞նչ է մատրոիդը

Մատրոիդը մաթեմատիկական կառուցվածք է, որն ընդհանրացնում է «գծային անկախության» գաղափարը վեկտորական տարածություններում և «ցիկլերի բացակայությունը» գրաֆներում:

Մատրոիդի աքսիոմները

Դիցուք $M = (S, I)$,որտեղ S-ը վերջավոր բազմություն է, իսկ I-ն դրա անկախ ենթաբազմությունների ընտանիքն է:

- **Դատարկ չլինելը:** Դատարկ բազմությունը պատկանում է անկախ բազմությունների ընտանիքին($\varnothing \in I$):
- **Ժառանգականություն (Hereditary property):** Եթե $A \in I$ և $B \subseteq A$, ապա $B \in I$:
- **Փոխանակման հատկություն (Exchange property):** Եթե $A, B \in I$ և $|A| > |B|$, ապա գոյություն ունի $x \in A \setminus B$ այնպես, որ $B \cup \{x\} \in I$:

$$M = (S, I) \quad \text{որտեղ} \quad I \subseteq 2^S$$

Մատրոիդների տեսակները

Գրաֆային մատրոիդ

S: Գրաֆի կողերի բազմությունը:

I: Կողերի այն ենթաբազմությունները, որոնք չեն պարունակում ցիկլ (անտառներ):

Գծային (Վեկտորական) մատրոիդ

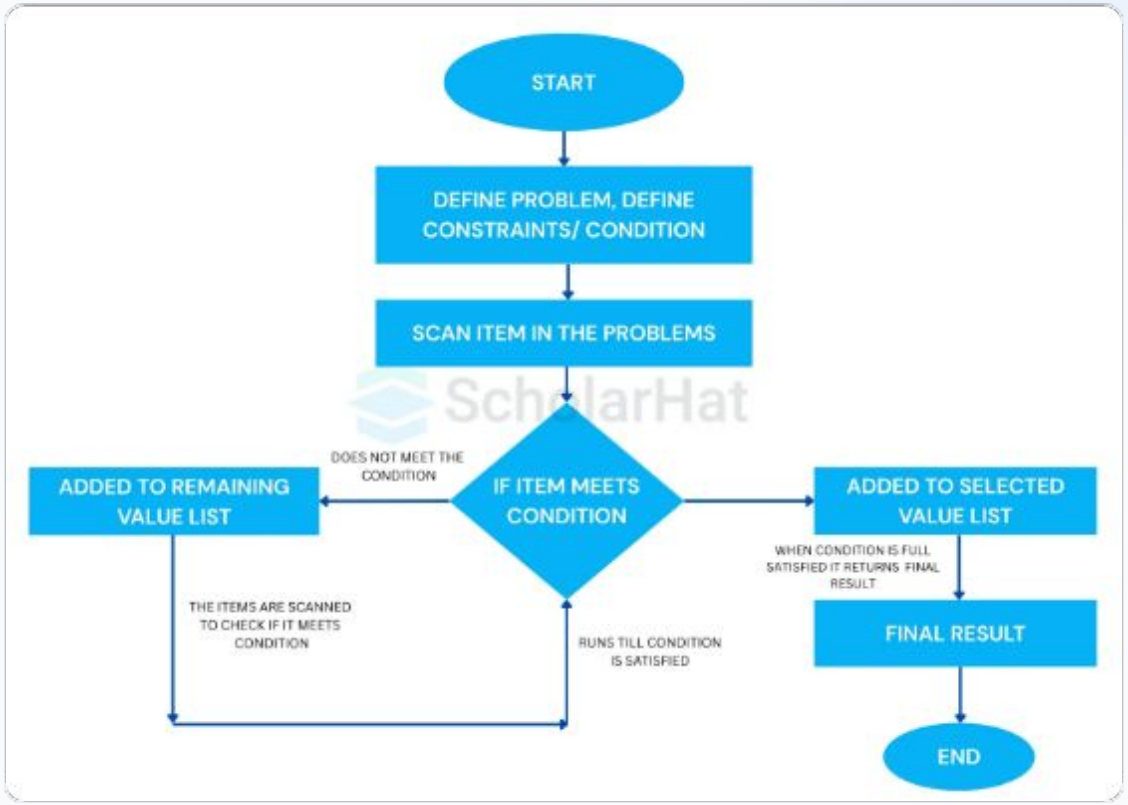
S: Վեկտորների բազմությունը:

I: Գծայնորեն անկախ վեկտորների բազմությունները:

Greedy ալգորիթմը մատրոիդների վրա

Greedy ալգորիթմը գտնում է առավելագույն քաշ ունեցող անկախ բազմությունը հետևյալ կերպ.

- 1. Տեսակավորել S-ի տարրերը քաշերի նվազման կարգով:
- 2. Սկսել դատարկ բազմությունից:
- 3. Յուրաքանչյուր քայլին ավելացնել տարրը, եթե այն չի խախտում անկախությունը:



Ռադո-Էդմոնդսի Թեորեմը

> *«Greedy ալգորիթմը տալիս է օպտիմալ լուծում բոլոր քաշային ֆունկցիաների համար այն և միայն այն դեպքում, եթե կառուցվածքը մատրոիդ է:»*
>
> ***— Ռադո, Էդմոնդս և Գեյլ***

Սա մատրոիդների տեսության ամենաառանցքային արդյունքն է, որը կապում է կառուցվածքը և օպտիմիզացիան:

Կրուսկալի ալգորիթմի քայլերը

Տեսակավորում
Բոլոր կողերը տեսակավորվում են ըստ քաշի (աճման կամ նվազման):

Ընտրություն
Վերցնում ենք հաջորդ ամենափոքր քաշով կողը:

Ստուգում
Արդյո՞ք կողի ավելացումը ստեղծում է ցիկլ: (Մատրոիդի անկախության ստուգում):

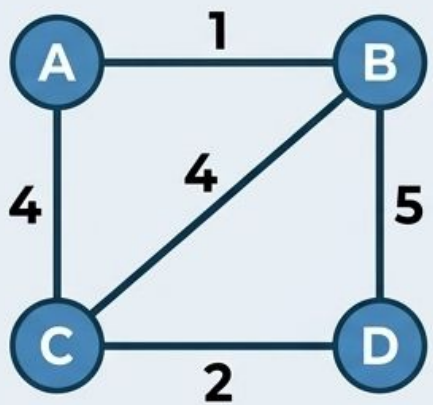
Ավելացում
Եթե ցիկլ չի ստեղծվում, կողն ավելացվում է կմախքային ծառին:

Կրուսկալի ալգորիթմը greedy ալգորիթմի դասական օրինակ է գրաֆային մատրոիդի վրա:

EXAMPLE: KRUSKAL'S ALGORITHM (FINDING MST)

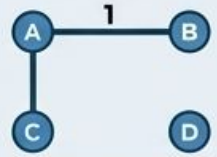
Connecting Graph Theory and Matroid Theory

1. INITIAL GRAPH & EDGE SORTING

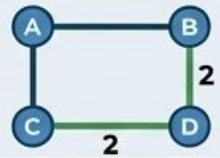


SORTED EDGES (ASCENDING WEIGHT)	
1.	(A,B) = 1
2.	(C,D) = 2
3.	(B,C) = 3
4.	(A,C) = 4
5.	(B,D) = 5

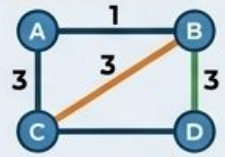
2. STEP-BY-STEP SELECTION (MATROID INDEPENDENCE)



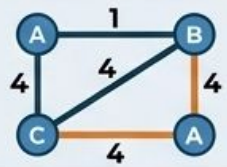
STEP 1: ADD (A,B) ✓
Keeps forest independent



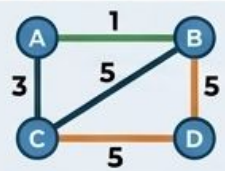
STEP 2: ADD (C,D) ✓
Keeps forest independent



STEP 3: ADD (B,C) ✓
Keeps forest independent

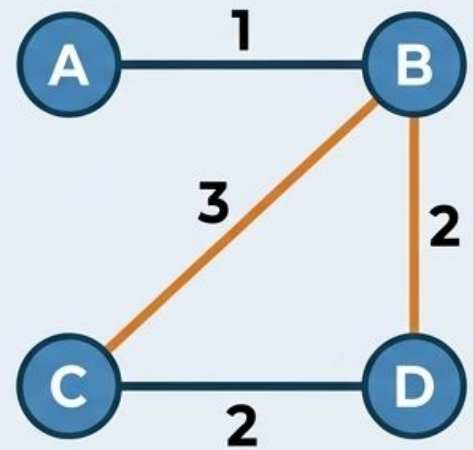


STEP 4: REJECT (A,C) ✗
Would create A-B-C-A cycle
REJECTED: NOT INDEPENDENT



STEP 5: REJECT (B,D) ✗
Would create B-C-D-B cycle

3. FINAL RESULT: MINIMUM SPANNING TREE (MST)



TOTAL WEIGHT: 1 + 3 + 2 = 6

This MST is a **BASIS** (Maximal Independent Set) of the Graphic Matroid

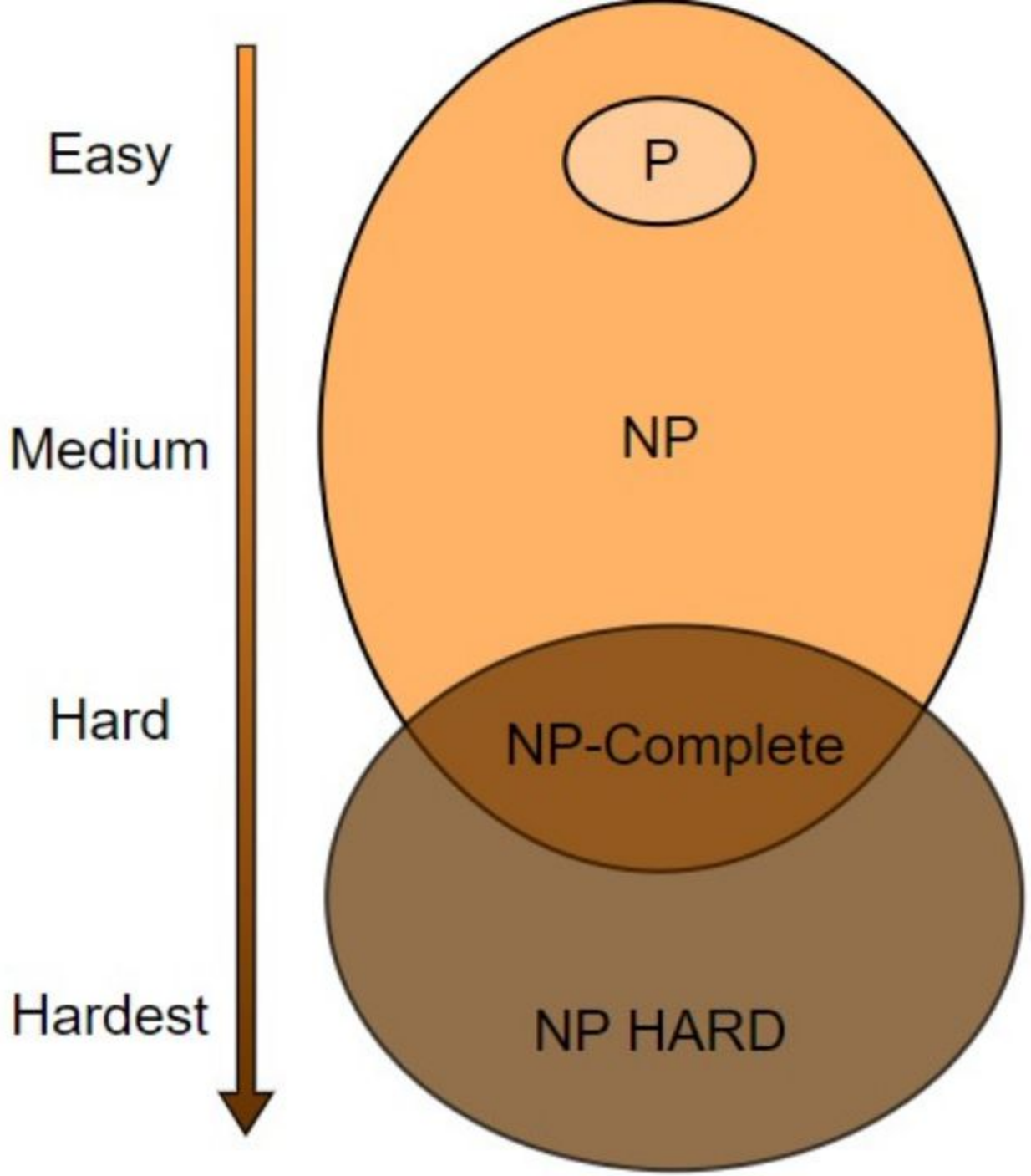
Խնդիրների համեմատություն

Խնդիր	Կառուցվածք	Greedy ալգորիթմ	Օպտիմալություն
Նվազագույն կմախքային ծառ	Գրաֆային մատրոիդ	Կրուսկալի ալգորիթմ	✔ Օպտիմալ է
Բազիսի որոնում	Վեկտորական մատրոիդ	Գաուսի մեթոդի greedy տարբերակ	✔ Օպտիմալ է
Շրջիկ վաճառողի խնդիր (TSP)	Ոչ-մատրոիդ	Մոտակա հարևանի մեթոդ	✘ Օպտիմալ չէ

Սահմանափակումները

Ոչ բոլոր օպտիմիզացիոն խնդիրներն ունեն մատրոիդային կառուցվածք:

Օրինակ՝ **Պայուսակի խնդիրը (Knapsack problem)** կամ **TSP(Traveling Salesman Problem)-ն** չեն բավարարում մատրոիդի աքսիոմներին, հետևաբար greedy ալգորիթմն այստեղ չի երաշխավորում լավագույն լուծումը: Սա օգնում է հետազոտողներին հասկանալ՝ երբ օգտագործել greedy մոտեցումը և երբ անցնել դինամիկ ծրագրավորմանը:



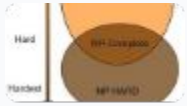
Ամփոփում

- Մատրոիդները greedy ալգորիթմների աշխատանքի հիմքն են:
- Գրաֆների տեսությունը լայնորեն օգտվում է մատրոիդների հատկություններից:
- Greedy ալգորիթմի հաջողությունը կախված է կառուցվածքի անկախության հատկությունից:

Image Sources

https://dotnettrickscloud.blob.core.windows.net/article/data%20structures/5620250714172106.webp

Source: www.scholarhat.com



https://compgeek.co.in/wp-content/uploads/2024/10/Complexity-Theory.jpg

Source: compgeek.co.in